SF1624 Algebra och geometri

Tjugofjärde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

8 december, 2009

Vektorrum

Definition

Ett *vektorrum* är en mängd V av vektorer med *addition* och *multiplikation med skalär* som uppfyller de räkneregler som vi sett tidigare, dvs

- $u + (v + w) = (u + v) + w, \qquad u, v, w \in V$
- $u + v = v + u, \qquad u, v \in V$
- $u + 0 = u, \qquad u \in V$
- För alla $u \in V$ finns $-u \in V$ så att $u + (-u) = 0$
- $(ab)u = a(bu) \qquad u \in V, a, b \in \mathbb{R}$
- $1u = u, \qquad u \in V$
- $(a + b)u = (au) + (bu), \qquad u \in V, a, b \in \mathbb{R}$
- $a(u + v) = (au) + (av), \qquad u, v \in V, a \in \mathbb{R}$

Exempel på vektorrum

Några exempel på vektorrum är

- $\mathbb{R}^n$, för $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Lösningsmängden till $Ax = 0$, för matris A
- Mändgen av alla funktioner från en mängd M till $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^M$)
- Mängden av kontinueriga funktioner på $\mathbb{R}$ eller på intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ($C(\mathbb{R})$ resp. $C([a, b])$)
- Mängden av kontinuerligt deriverbara funktioner på på $\mathbb{R}$ eller på intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ($C^1(\mathbb{R})$ resp. $C^1([a, b])$)
- Lösningsmängden till en linjär differentialekvation, tex $y'' + y = 0$.
- Mängden av polynom av grad högst n (P_n).

Underrum

Ofta behöver vi inte kolla om alla axiom för vektorrum är uppfyllda eftersom vår mängd är en delmängd av ett vektorrum.

Definition

Ett *underrum* eller *delrum* U till ett vektorrum V är en delmängd som är ett vektorrum med samma addition och multiplikation med skalär.

Sats

$U \subseteq V$ är ett underrum om och endast om

- $u, v \in U \implies u + v \in U$
- $u \in U, a \in \mathbb{R} \implies au \in U$

Vi säger då att U är slutet under addition och multiplikation med skalär.

Exempel på underrum

Några exempel på underrum är

- $P_m \subseteq P_n$ om $m \leq n$ - polynom av grad högst m är också polynom av grad högst n.
- $C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$ - deriverbara funktioner är alltid kontinuerliga
- Lösningsmängden till $Ax = 0$ är ett underrum till $\mathbb{R}^n$ om A är en $m \times n$-matris.
- Lösningsrummet till differentialekvationen $y'' + y = 0$ är ett delrum till $C^2(\mathbb{R})$.

Linjära avbildningar

Precis som för $\mathbb{R}^n$ kan vi tala om linjära avbildningar mellan vektorrum.

Definition

En avbildning (funktion) T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en *linjär avbildning* om

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$, för alla $u, v \in V$,
- $T(au) = aT(u)$, för alla $a \in R$ och alla $u \in V$.

Exempel

Några exempel på linjära avbildningar är

- $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$ där $D(f(x)) = f'(x)$
- $T : C[a,b] \to C^1[a,b]$, där $T(f(x)) = \int_a^x f(t)\, dt$

Skalärprodukt

Ibland kan vi också införa en skalärprodukt på vårt vektorrum som gör det möjligt att mäta avstånd och vinklar.

Definition

Funktionen från $V \times V$ till V (u, v) är en *skalärprodukt* om

- $(u, v) = (v, u)$
- $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
- $(au, v) = a(u, v)$
- $(u, u) \geq 0$ med likhet precis då $u = 0$.

Exempel

På vektorrummet $C([a, b])$ av kontinuerliga funktioner har vi skalärprodukten

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Linjärt oberoende och baser

Definition (Lnjärt oberoende, bas, dimension)

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ i V är *linjärt oberoende* om

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Om vi dessutom kan skriva varje vektor i V som en linjärkombination av $u_1, u_2, \ldots, u_n$ utgör dessa en *bas* för V. Om V har en bas med n vektorer säger vi att V har *dimension* n.

Exempel

Om A är $m \times n$-matris och vi och Gausselimination ger k kolonner som saknar ledande ettor kommer lösningsrummet till $Ax = 0$ att ha dimension k.
En bas $u_1, u_2, \ldots, u_k$ får vi genom att skriva lösngen som

$$x = t_1 u_1 + t_2 u_2 + \cdots + t_k u_k$$

där $t_1, t_2, \ldots, t_k$ är reella parametrar.